Magnetna hidrostatika

12

Uvodne napomene

- Ako stavimo $\partial/\partial t=0$ i $\mathbf{v}=0$ u jednačine magnetne hidrodinamike, dobijamo korespodentne jednačine magnetne hidrosttike.
- Magnetna hidrostatika je od intersa kako u vezi sa problemima kontrolisane termonuklearne fuzije, tako i u astrofizičkim razmatranjima.

Glavne jednačine magnetne hidrostatike

- To su jednačine koje rezultiraju iz jednačine kretanja i jednačine magnetnog polja

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \equiv \frac{1}{\mu_0}(rot\mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\nu_m \Delta \mathbf{B} = 0$$

Fizičke posledice

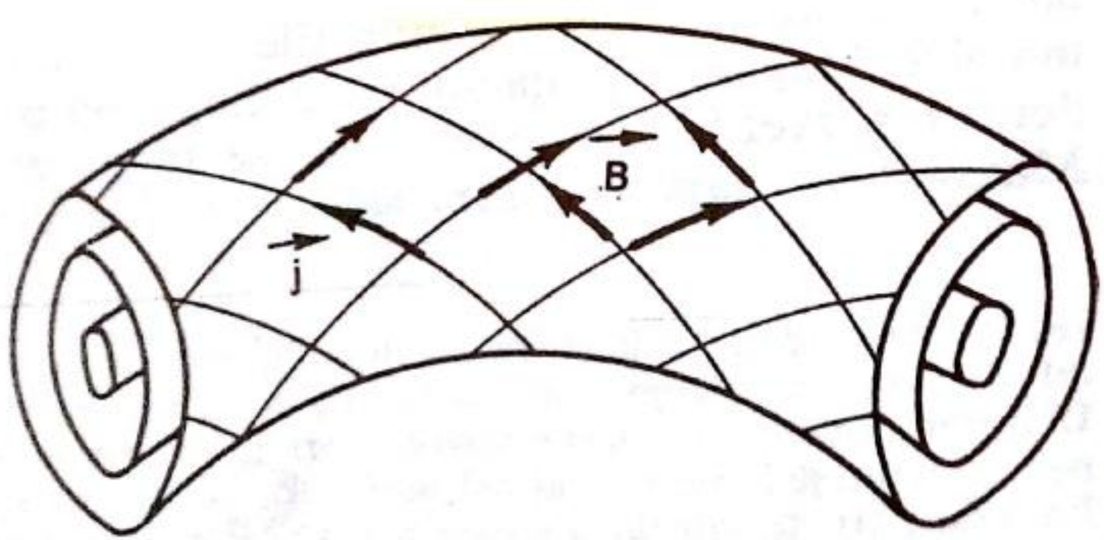
- 1) Magnetohidrostatička konfiguracija nije moguća u proizvoljnom magnetnom polju.
- Magnetno polje u kome je moguća statička konfiguracija mora zadovoljavati uslov

$$rot\left(\mathbf{B}\times rot\mathbf{B}\right)=0 \qquad ili \qquad rot\left[\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}\right]=0$$

  koji se može rečima formulisati kao zahtev da magnetna Lorenc-ova sila bude potencijalna.
- I druga jednačina nameće ograničenje da magnetno polje u kome bi bila mogća statička konfiguracija, ukoliko fluid nije beskonačno elektroporvodan.
- U fluidu konačne provodnosti, tj. ukoliko je $\nu_m \neq 0$ (za $\nu_m \equiv 0$ ta jednačina je identički zadovoljena) magnetno polje u kome je moguća statička konfiguracija mora zadovoljavati Laplas-ovu jednačinu.

nastavak...

- 2) U stanju ravnoteže vektori **j** i **B** moraju ležati u izobarnim površima (površina *p*=const).



Magnetno polje nulte sile

- To je polje u kome je MHD ravnoteža moguća samo zbog toga što su **B** i **j** u svakoj tački kolinearni, tako da je magnetna Lorenc-ova sila **j**x**B**=0. Takve magnetna polja zadovoljavaju jednačinu rot**B**=α**B**, gde je α neka skalarna funkcija koordinata.
- Ako je a konstantan skalar, dobija se da magnetno polje nulte sile zadovoljava tzv. Helmholc-ovu jednačinu

$$\Delta\mathbf{B} + \alpha^2\mathbf{B} = 0$$

- Pošto kod fluida konačne provodnosti ($\nu_m \neq 0$) magnetno polje mora zadovoljavati i jednačinu Δ**B**=0, vidimo da u takvom slučaju ne može biti α=const. Skalar α može biti konstantan samo ako je magnetno polje zamrznuto u fluid.

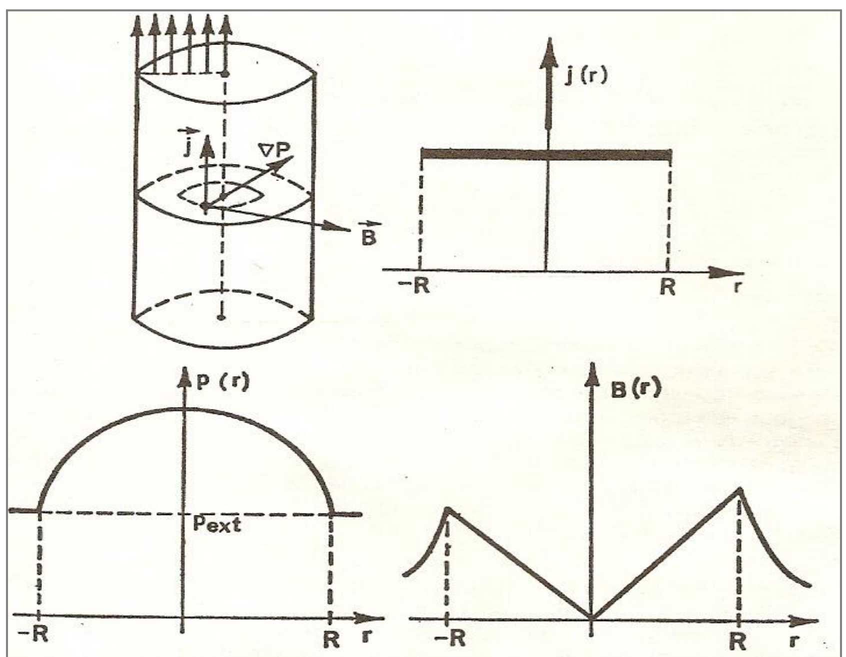
Linearni (“zeta”) pinč

- To je primer statičke konfiguracije u kojoj je jednačina
$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \equiv \frac{1}{\mu_0}(rot\mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$
zadovoljena sa *uzajamno ortogonalim vektorima **j**, **B** i ∇p.*
- U najjednostavnijem obliku, linearni pinč je dug cilindar elektroprovodnog fluida, kroz koji paralelno osi teče aksijalno simetrično raspoređena struja.
- Pošto se paralelne struje istog smera privlače, javlja se tendencija radijalnog sažimanja cilindra (tzv. “pinč efekt”).

Linearni pinč – plazma konačne provodnosti

- Pritisak u središtu cilindra se povećava sve do uspostavljanja ravnoteže date jednačinom

$$\nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{B} \equiv \frac{1}{\mu_0}\left(rot\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}$$



Linearni pinč – gustina struje

- Uvedimo cilindrične koordinate r,φ i z.
- Gustina struje: $\mathbf{j}$=j(r)$\mathbf{e}_z$, jer je pretpostavljeno da ona teče paralelno osi i da je raspoređena simetričmo.
- Kako naći funkciju j(r)?
- Pođimo od jednačine $\Delta\mathbf{B}$=0. Na osnovu identiteta

$$\Delta\mathbf{B} = grad\, div\mathbf{B} - rot\, rot\mathbf{B}$$

  i Maksvel-ovih jednačina div$\mathbf{B}$=0 i rot$\mathbf{B}$=$\mu_0\mathbf{j}$, zaključujemo da mora biti $\Delta\mathbf{B}$=-$\mu_0$rot$\mathbf{j}$, tako da se jednačina $\Delta\mathbf{B}$=0 svodi na rot$\mathbf{j}$=0.
- Konačno se dobija rot$\mathbf{j}$=-(dj/dr)$\mathbf{e}_\varphi$, tako da uslov rot$\mathbf{j}$=0 daje

$$\frac{dj}{dr} = 0$$

- Kod fluida konačne provodnosti gustina struje mora bitikonstantna po poprešnom preseku pinča.

Linearni pinč – magnetno polje

- Pošto struja teče paralelno z-osi, magnetno polje je čisto azimutalno, **B**=B(r)$\mathbf{e}_\varphi$.
- Intenzitet magnetnog polja je najlakše naći primenom Amperove teoreme. Rezultat je:

$$B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 j\, r$$

- Očevidno da *magnetno polje raste linearno sa udaljenjem od ose*, počinjući od vrednosti nula na osi pinča.
- Magnetna Lorenc-ova sila **j**x**B** je usmerena ka osi,

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = j\mathbf{e}_z \times \left(\frac{1}{2}\mu_0 j\, r\mathbf{e}_\varphi\right) = -\frac{1}{2}\mu_0 j^2 r\mathbf{e}_r$$

Linearni pinč – pritisak

- Pošto je $\nabla p=(dp/dr)\mathbf{e}_r$, jer pritisak zavisi samo od koordinate *r*, jednačina $\nabla=\mathbf{j}\mathrm{x}\mathbf{B}$ dovodi do

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{1}{2}\mu_0 j^2 r \qquad tj. \qquad p=p_{ext}-\frac{1}{4}\mu_0 j^2 r^2+\frac{1}{4}\mu_0 j^2 R^2$$

- gde je *R* radijus pinča, p_{ext} je pritisak na granici (zar=R).
- *Pritisak gasa u pinču opada, dakle, sa udaljenjem od ose po paraboličkom zakonu*. Rezultat semođe dati i kao

$$p+\frac{1}{4}\mu_0 j^2 r^2=p_{ext}+\frac{1}{4}\mu_0 j^2 R^2=const \qquad p+\frac{1}{\mu_0}B^2=const$$

- Prema tome, *efektivni pritisak* $p_{eff}=p+p_m$ nije konstantan kod linearnog pinča u plazmi konačne provodnosti; tu osobinu ima veličina $p+2p_m$.